

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه		تاریخ امتحان: ۱۳۹۰ / ۳ / ۱۲	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دوم (خرداد ماه) سال ۱۳۹۰		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات	نمره
۱	با استفاده از اصل استقرای ریاضی، ثابت کنید که رابطه‌ی زیر به ازای هر عدد طبیعی n برقرار است: $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$	۱/۵
۲	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل بررسی کنید. الف) به ازای هیچ دو عدد اول a و b ، عدد $a+b$ اول نیست. ب) اگر x فرد باشد، آنگاه $x(x+2)$ هم فرد می‌باشد.	۱/۵
۳	S یک زیر مجموعه‌ی 65 عضوی از اعداد طبیعی است، اگر اعضای S را بر عدد 16 تقسیم کنیم، نشان دهید دست کم 5 عضو از S دارای باقیمانده‌ی یکسانی بر 16 می‌باشند.	۱
۴	ثابت کنید اگر a, b دو عدد حقیقی باشند که $a+b > 0$ ، آنگاه رابطه‌ی زیر برقرار می‌باشد. $\frac{a^3 + b^3}{a + b} \geq ab$	۱/۵
۵	اگر مجموعه‌ی $A = \{x, \{x\}, \{x, \{x\}\}\}$ باشد، کدامیک از عبارات زیر درست و کدامیک نادرست است؟ الف) $\{x\} \subseteq A$ ب) $\{\{x\}\} \in A$	۰/۵
۶	اگر A و B و C هر کدام یک مجموعه باشند: الف) با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها ثابت کنید: $A - (A - B) = A \cap B$ ب) اگر $C \neq \emptyset$ و داشته باشیم: $A \times C = B \times C$ ، آنگاه ثابت کنید: $A = B$	۲/۲۵
۷	اگر $A = \{1, 2, 4\}$ و $B = \{2, 3, 5\}$ و R رابطه‌ای از A به روی B باشد که به صورت زیر تعریف شده است: ابتدا $A \times B$ را محاسبه کرده و سپس اعضای رابطه‌ی R را تعیین کنید. $R = \left\{ (x, y) \mid \frac{x+y}{3} \in \mathbb{N} \right\}$	۱/۲۵
۸	رابطه‌ی R روی $R - \{*\}$ بصورت زیر تعریف شده است: $(a, b) R (c, d) \Leftrightarrow \frac{2a-3}{b} = \frac{2c-3}{d}$ الف) ثابت کنید رابطه‌ی R یک رابطه هم ارزی است. ب) کلاس هم ارزی $[(-1, 7)]$ را به دست آورید.	۱/۵
	«ادامه سؤالات در صفحه‌ی دوم»	

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه		تاریخ امتحان: ۱۳۹۰ / ۳ / ۱۲	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دوم (خرداد ماه) سال ۱۳۹۰		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات	نمره
۹	در قسمت های "الف" و "ب" داده شده ی زیر ، با عبارت مناسب جای خالی را تکمیل کنید و در قسمت "ج" با استفاده از واژه داده شده گزاره ها را کامل کنید. الف) هر..... ، یک زیر مجموعه از فضای نمونه ای است. ب) در فضای نمونه ای پرتاب یک سکه و یک تاس سالم با یکدیگر ، تعداد زیر مجموعه های فضای نمونه ای آن برابر است. ج) انتخاب یک نقطه از سطح یک دایره، آزمایشی از فضای نمونه ای و انتخاب تعداد محصولات معیوب یک کارخانه ، آزمایشی از فضای نمونه ای است. (گسسته - پیوسته)	۱
۱۰	روی ۱۵ کارت یکسان، اعداد از یک تا ۱۵ را نوشته ایم ، کارتی را به تصادف خارج می کنیم : الف) پیشامد A را طوری بنویسید که عدد روی کارت مضرب ۳ یا اول باشد. ب) پیشامد B آن که عدد روی کارت فرد و اول باشد.	۱
۱۱	۴ نفر زن و ۶ نفر مرد ، برای تدریس درس ریاضی آموزشی تقاضا داده اند، امکان استخدام تنها برای سه نفر از آن ها وجود دارد. مطلوبست محاسبه ی احتمال آن که حداقل دو نفر زن انتخاب شوند.	۱/۲۵
۱۲	اگر $S = \{1, 2, 3, 4\}$ فضای نمونه یک تجربه تصادفی باشد و داشته باشیم : $p(1) = 2p(2) = 3p(3) = 4p(4)$ مطلوبست محاسبه ی $p(1)$.	۱/۵
۱۳	۵۰ درصد افراد جامعه ای با سواد هستند ، احتمال آن که از ۲۰ نفر آن ها ۶ نفر بیسواد بوده باشند را محاسبه کنید.	۰/۷۵
۱۴	دو عدد حقیقی x, y را به تصادف از بازه ی $[0, 3]$ انتخاب می کنیم ، احتمال آن را حساب کنید که: الف) $x + y \leq 2$ ب) $x + y = 3$	۱/۵
۱۵	احتمال آنکه دانش آموزی در درس ریاضی قبول شود ۵۵ درصد و در درس شیمی قبول شود ۶۰ درصد است ، اگر احتمال آنکه حداقل در یکی از دو درس قبول شود ۷۵ درصد باشد ، احتمال آن را بیابید که در هر دو درس قبول شود.	۱
۱۶	برای دو پیشامد A, B از فضای نمونه ای S ثابت کنید : $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$	۱
	جمع نمره	۲۰

« موفق باشید »

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۳۹۰ / ۳ / ۱۲
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دوم (خرداد ماه) سال ۱۳۹۰	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

۱	$p(1): \frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (0/25)$ $\text{فرض استقراء } P(K): \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{k+2}{2^k} \quad (0/25)$ $\text{حکم استقراء } P(K+1): \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{k}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{k+3}{2^{k+1}} \quad (0/5)$ $p(k+1): \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{k}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{k+2}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}} = 2 + \frac{-2k-4+k+1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{k+3}{2^{k+1}} \quad (0/25)$	۱
۲	<p>الف) نادرست (۰/۲۵) و مثال نقض: ۳ و ۲ هر دو اول هستند و ۲+۳=۵ هم اول است. (۰/۲۵)</p> <p>ب) درست (۰/۲۵) و استدلال استنتاجی:</p> $x = 2k+1 \Rightarrow (2k+1)(2k+3) = 4k^2 + 8k + 3 = 2(2k^2 + 4k + 1) + 1 = 2k'+1 \quad (0/25)$	۲
۳	<p>مجموعه ۶۵ عضوی $S =$ تعداد کبوترها (۰/۲۵)، باقیمانده های تقسیم بر ۱۶ = $\{0, 1, 2, \dots, 15\}$ = تعداد لانه ها (۰/۲۵)</p> <p>بر طبق اصل لانه کبوتر (۰/۲۵)، $65 = 4 \times 16 + 1 \Rightarrow 4 + 1 = 5$، پس حداقل ۵ عضو باقیمانده ی یکسانی بر ۱۶ دارند.</p>	۳
۴	$\frac{a^3 + b^3}{a + b} \geq ab \Leftrightarrow a^3 + b^3 \geq (a + b) ab \Leftrightarrow (a + b) (a^2 - ab + b^2) \geq (a + b) ab \Leftrightarrow a^2 - ab + b^2 \geq ab \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0 \quad (0/25)$ <p>بر طبق استدلال برگشتی چون به عبارت همواره درست رسیده ایم پس حکم بر قرار است. (۰/۲۵)</p>	۴
۵	<p>الف) درست</p> <p>ب) نادرست</p> <p>هر قسمت (۰/۲۵)</p>	۵
۶	<p>الف)</p> $A - (A - B) = A \cap (A \cap B)' = A \cap (A' \cup B) = (A \cap A') \cup (A \cap B) = \phi \cup (A \cap B) = A \cap B \quad (0/25)$ <p>طبق فرض (۰/۲۵)</p>	۶
	« ادامه در صفحه ی دوم »	

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۳۹۰ / ۳ / ۱۲
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دوم (خرداد ماه) سال ۱۳۹۰	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

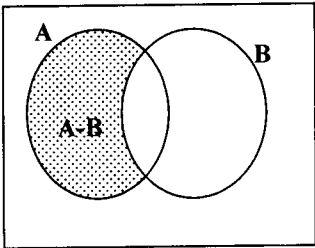
	<p>ب) راه حل اول: اثبات با برهان خلف (۰/۲۵)</p> <p>$A \neq B \Rightarrow \exists x, y: x \in A, y \in B, x \neq y, C \neq \emptyset \Rightarrow z \in C$ (۰/۵)</p> <p>$\Rightarrow (x, z) \in A \times C, (y, z) \in B \times C, (x, z) \neq (y, z)$</p> <p>$\Rightarrow A \times C \neq B \times C$ (۰/۵)</p> <p>راه حل دوم:</p> <p>$\forall x \in A, y \in C \Rightarrow (x, y) \in A \times C \xrightarrow{A \times C = B \times C} (x, y) \in B \times C$ (۰/۲۵)</p> <p>$\Rightarrow x \in B, y \in C \Rightarrow A \subseteq B$ (I) (۰/۲۵)</p> <p>$\forall x \in B, y \in C \Rightarrow (x, y) \in B \times C \xrightarrow{A \times C = B \times C} (x, y) \in A \times C$ (۰/۲۵)</p> <p>$\Rightarrow x \in A, y \in C \Rightarrow B \subseteq A$ (II) (۰/۲۵) (I), (II) $\Rightarrow A = B$ (۰/۲۵)</p>	
۱/۲۵	<p>هر سه زوج مرتب نوشته شده (۰/۲۵) در کل (۰/۷۵)</p> <p>$A \times B = \{(1,2), (1,3), (1,5), (2,2), (2,3), (2,5), (4,2), (4,3), (4,5)\}$</p> <p>$R = \{(1,2), (1,5), (4,2), (4,5)\}$ (۰/۵)</p>	۷
۱/۵	<p>الف) رابطه بازتابی (۰/۲۵)</p> <p>$(a, b) R (a, b) \Rightarrow \frac{2a-3}{b} = \frac{2a-3}{b}$</p> <p>ب) $(a, b) R (c, d) \Rightarrow (c, d) R (a, b)$</p> <p>$(a, b) R (c, d) \Rightarrow \frac{2a-3}{b} = \frac{2c-3}{d} \Rightarrow \frac{2c-3}{d} = \frac{2a-3}{b} \Rightarrow (c, d) R (a, b)$</p> <p>رابطه تقارنی (۰/۲۵)</p> <p>ج) $(a, b) R (c, d), (c, d) R (e, f) \Rightarrow (a, b) R (e, f)$</p> <p>$(a, b) R (c, d) \Rightarrow \frac{2a-3}{b} = \frac{2c-3}{d}$</p> <p>$(c, d) R (e, f) \Rightarrow \frac{2c-3}{d} = \frac{2e-3}{f}$</p> <p>$\Rightarrow \frac{2a-3}{b} = \frac{2e-3}{f} \Rightarrow (a, b) R (e, f)$</p> <p>رابطه تعدی (۰/۲۵)</p> <p>هر سه خاصیت را دارد پس هم ارزی است. (۰/۲۵)</p> <p>$[(-1, 7)] = \left\{ (x, y) \mid (x, y) R (-1, 7) \right\} \Rightarrow \frac{2x-3}{y} = \frac{2(-1)-3}{7} \Rightarrow y = \frac{-14}{5}x + \frac{21}{5}$ (۰/۵)</p>	۸
	« ادامه در صفحه‌ی سوم »	

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۳۹۰ / ۳ / ۱۲
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دوم (خرداد ماه) سال ۱۳۹۰	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

۹	الف) پیشامد یا بر آمد (ب) ۲۱۲ ج) پیوسته - گسسته هر قسمت (۰/۲۵)	۱
۱۰	$A = \{۳, ۶, ۹, ۱۲, ۱۵, ۲, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳\}$ (۰/۵) $B = \{۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳\}$ (۰/۵)	۱
۱۱	$p(A) = \frac{\binom{۰/۲۵}{۴} \binom{۰/۲۵}{۶} + \binom{۰/۲۵}{۴}}{\binom{۰/۲۵}{۱۰}} = \frac{۴۰}{۱۲۰} = \frac{۱}{۳}$ (۰/۲۵)	۱/۲۵
۱۲	$P(۱) = ۲P(۲) = ۳p(۳) = ۴p(۴)$ $p(۴) = x \rightarrow P(۱) = ۴x, p(۲) = ۲x, p(۳) = \frac{۴}{۳}x$ $p(۱) + p(۲) + p(۳) + p(۴) = ۱ \Rightarrow ۴x + ۲x + \frac{۴}{۳}x + x = ۱ \Rightarrow x = \frac{۳}{۲۵} \Rightarrow p(۱) = \frac{۱۲}{۲۵}$ (۰/۲۵)	۱/۵
۱۳	$p(A) = \frac{\binom{۰/۲۵}{۲۰}}{\binom{۰/۲۵}{۶}}$ (۰/۵)	۰/۷۵
۱۴	الف) $p(A) = \frac{\binom{۰/۲۵}{۲ \times ۲}}{۲ \times ۲} = \frac{۲}{۹}$ (الف) شکل (۰/۵) ب) $P(B) = \frac{۰}{۹} = ۰$ چون خط مساحتی ندارد. (۰/۲۵) شکل (۰/۲۵)	۱/۵
	« ادامه در صفحه‌ی چهارم »	

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۳۹۰ / ۳ / ۱۲
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دوم (خرداد ماه) سال ۱۳۹۰	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱۵	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (۰/۵) \quad ۰/۷۵ = ۰/۵۵ + ۰/۶۰ - P(A \cap B)$ $P(A \cap B) = ۰/۴۰ \quad (۰/۵)$	۱
۱۶	$A \cap B' = A - B \Rightarrow A = (A \cap B') \cup (A \cap B) \quad (۰/۲۵) \Rightarrow P(A) = P(A \cap B') + P(A \cap B) \Rightarrow$ $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) \quad (۰/۲۵)$ <p> $(A \cap B)$, $(A - B)$ دو پیشامد متمایز و از هم جدا هستند. (۰/۲۵) </p> <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 20px;">  </div> <div> <p>شکل (۰/۲۵)</p> </div> </div>	۱
	جمع نمره	۲۰
	« موفق باشید »	

مصححین گرامی:

لطفاً برای راه حل های صحیح دیگر هم به تناسب نمره منظور فرمایید.